

3) 在再扩充模糊逻辑中, 如果存在公式 G 的某个解释 I , 使得 $T_I(G) \geq \mu$, 则称 G 是可满足的; 如果存在公式 G 的某个解释 I , 使得 $T_I(G) \leq \lambda$, 则称 G 是可弄假的.

定义3 设 G 和 H 是再扩充模糊逻辑中的公式, 如果对所有满足 G 的解释 I , 都不弄假 H , (即 $\forall I$, 若 $T_I(G) \geq \mu$, 则 $T_I(H) < \lambda$), 则称从前提 G 推出的逻辑结果 H 是有效的, 简称为 H 是 G 的有效逻辑结果.

定义4 设 $G = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ 是再扩充模糊逻辑中的公式集, 如果存在 G 的解释 I , 使得对所有 $H_i \in G$, 都有 $T_I(H_i) \geq \mu$ ($i = 1, \dots, m$), 则称公式集 G 是相容的. 反之, 如果对 G 的任意解释 I , 都存在 $H_i \in G$, 使得 $T_I(H_i) < \mu$, 则称 G 是不相容的.

定理1 设 $G = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ 和 H 分别是再扩充模糊逻辑中的公式集和公式. 如果 H 是 G 的有效逻辑结果, 则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_m \rightarrow H$ 是不可弄假的.

证明 用反证法证明. 若存在 G 和 H 的解释 I , 使 I 弄假 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_m \rightarrow H$, 则 $T_I(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_m \rightarrow H) \leq \lambda$. 即

$$T_I(\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_m) \vee H) = T_I(\neg H_1 \vee \neg H_2 \vee \dots \vee \neg H_m \vee H) = (T_I(H_1))' \dot{\vee} (T_I(H_2))' \dot{\vee} \dots \dot{\vee} (T_I(H_m))' \dot{\vee} T_I(H) \leq \lambda$$

于是, 对每一个 i , 都有 $(T_I(H_i))' \leq \lambda$ 且 $T_I(H) \leq \lambda$, ($i = 1, \dots, m$). 即

$$T_I(H_i) \geq \lambda' = \mu, (i = 1, \dots, m); \quad T_I(H) \leq \lambda$$

从而

$$T_I(G) = \inf\{T_I(H_i) : i = 1, \dots, m\} \geq \mu,$$

又因为 H 是 G 的有效逻辑结果, 所以 $T_I(H) < \lambda$ 这与上面得到的 $T_I(H) \leq \lambda$ 相矛盾.

定理2 设 $G = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ 和 H 分别是再扩充模糊逻辑中的公式集和公式, 则 H 是 G 的有效逻辑结果当且仅当 $G \cup \{\neg H\}$ 是不相容的.

证明 先证明必要性. 对任意 G 和 H 的解释 I ,

1) 如果 $T_I(H) < \lambda$ 则 $T_I(\neg H) = (T_I(H))' \geq \lambda' = \mu$, 所以 $G \cup \{\neg H\}$ 是不相容的.

2) 如果 $T_I(H) \leq \lambda$ 因为 H 是 G 的有效逻辑结果, 所以 $T_I(G) \geq \mu$, 即

$$T_I(G) = \inf\{T_I(H_i) : i = 1, \dots, m\} \geq \mu,$$

从而存在 $H_i \in G$, 使得 $T_I(H_i) \geq \mu$, 所以 $G \cup \{\neg H\}$ 是不相容的.

再证明充分性. 设 $G \cup \{\neg H\}$ 是不相容的, 下面用反证法证明 H 是 G 的模糊逻辑推论. 如果 H 不是 G 的模糊逻辑推论, 则存在 G 和 H 的解释 I , 使得

$$T_I(G) \geq \mu; \quad T_I(H) \leq \lambda.$$

从而 $T_I(\neg H) = (T_I(H))' \geq \lambda' = \mu$, 于是

$$T_I(G \cup \{\neg H\}) = T_I(G) \dot{\vee} T_I(\neg H) = \inf\{T_I(H_1), \dots, T_I(H_m)\} \dot{\vee} T_I(\neg H) \geq \mu,$$

这说明 $G \cup \{\neg H\}$ 是相容的, 这与假设 $G \cup \{\neg H\}$ 是不相容矛盾.

定理3 在再扩充模糊逻辑中, 设 C 是任意子句及 σ 是任意替换, 则对任意解释 I , 都有 $T_I(C) \leq T_I(C^\sigma)$. 并且如果 $\mu < \lambda$ 那么 C^σ 是 C 的有效逻辑结果.

证明 在任意解释 I 下,

$$T_I(C) = \inf\{T_I(C^\tau) : C^\tau \in \Sigma\},$$

$$T_I(C^\sigma) = \inf\{T_I((C^\sigma)^\tau) : (C^\sigma)^\tau \in \Sigma\} = \inf\{T_I(C^{\sigma\tau}) : C^{\sigma\tau} \in \Sigma\},$$

由于

$$\{C^{\sigma}: C^{\sigma} \in \Sigma\} \subseteq \{C^{\tau}: C^{\tau} \in \Sigma\},$$

所以 $T_I(C) \leq T_I(C^{\circ})$. 如果 $\mu < \lambda$, 则当 I 满足 C 时, $T_I(C) \geq \mu$. 又因为 $T_I(C) \leq T_I(C^{\circ})$, 所以 $T_I(C^{\circ}) < \lambda$, 即 I 不弄假 C° . 这说明 C° 是 C 的有效逻辑结果.

定理 4 在再扩充模糊逻辑中, 设 $P(x)$ 和 $P(y)$ 是任意可合一的两个文字, 则对任意解释 I , 或者 I 不满足 $P(x) \wedge \neg P(y)$, 或者 I 弄假 $P(x) \wedge \neg P(y)$.

证明 因为 $P(x)$ 和 $P(y)$ 是可合一的, 所以存在合一 σ , 使得 $P(x)^{\circ} \equiv P(y)^{\circ}$. 由定理 1 得, 对任意解释 I , 都有 $T_I(P(y)^{\circ}) \equiv T_I(P(x)^{\circ}) \geq T_I(P(x))$, 并且

$$T_I(\neg P(y)) = \inf\{T_I(\neg P(y)^{\tau}): P(y)^{\tau} \in \Sigma\} = \inf\{(T_I(P(y)^{\tau}))': P(y)^{\tau} \in \Sigma\},$$

1) 如果 $T_I(P(x)) \geq \mu$, 那么 $T_I(P(y)^{\circ}) \geq \mu$, 即 $(T_I(P(y)^{\circ}))' \leq \mu' = \lambda$, 于是

$$T_I(\neg P(y)) = \inf\{(T_I(P(y)^{\tau}))': P(y)^{\tau} \in \Sigma\} \leq (T_I(P(y)^{\circ}))' \leq \lambda.$$

从而

$$T_I(P(x) \wedge \neg P(y)) = T_I(P(x)) * T_I(\neg P(y)) \leq T_I(\neg P(y)) \leq \lambda,$$

即 I 弄假 $P(x) \wedge \neg P(y)$.

2) 如果 $T_I(P(x)) > \mu$, 由于

$$T_I(P(x) \wedge \neg P(y)) = T_I(P(x)) * T_I(\neg P(y)) \leq T_I(P(x)),$$

所以 $T_I(P(x) \wedge \neg P(y)) > \mu$, 即 I 不满足 $P(x) \wedge \neg P(y)$.

定理 5 在再扩充模糊逻辑中, 设两个子句

$$C_1 = P(x) \vee L_1; \quad C_2 = \neg P(y) \vee L_2$$

的任意一个归结式为 $R(C_1, C_2) = L_1^{\circ} \vee L_2^{\circ}$, 其中 $P(x)$ 与 $P(y)$ 是可合一的两个文字, L_1 与 L_2 为两个子句, σ 是 $\{P(x), P(y)\}$ 的最一般合一. 如果 $\mu < \lambda$ 那么 $R(C_1, C_2)$ 是 $C_1 \wedge C_2$ 有效逻辑结果.

证明 $T_I(C_1 \wedge C_2) = T_I((P(x) \vee L_1) \wedge (\neg P(y) \vee L_2)) =$

$$T_I((P(x) \wedge \neg P(y)) \vee (P(x) \wedge L_2) \vee (L_1 \wedge \neg P(y)) \vee (L_1 \wedge L_2)) =$$

$$T_I(P(x) \wedge \neg P(y)) \dot{\vee} T_I(P(x) \wedge L_2) \dot{\vee} T_I(L_1 \wedge \neg P(y)) \dot{\vee} T_I(L_1 \wedge L_2),$$

如果 I 满足 $C_1 \wedge C_2$, 则 $T_I(C_1 \wedge C_2) \geq \mu$. 下面用反证法证明 I 不弄假 $R(C_1, C_2)$.

如果 I 弄假 $R(C_1, C_2)$, 即 $T_I(R(C_1, C_2)) = T_I(L_1^{\circ} \vee L_2^{\circ}) \leq \lambda$, 则 $T_I(P(x) \wedge \neg P(y)) \leq \lambda$ 由于

$$T_I(P(x) \wedge L_2) = T_I(P(x)) * T_I(L_2) \leq T_I(L_2) \leq T_I(L_1 \vee L_2),$$

根据定理 3 得, $T_I(L_1 \vee L_2) \leq T_I(L_1^{\circ} \vee L_2^{\circ})$. 这样 $T_I(P(x) \wedge L_2) \leq T_I(L_1^{\circ} \vee L_2^{\circ})$. 因此

$$T_I(P(x) \wedge L_2) \leq \lambda.$$

同理 $T_I(L_1 \wedge \neg P(y)) \leq \lambda$, $T_I(L_1 \wedge L_2) \leq \lambda$ 于是

$$T_I(C_1 \wedge C_2) = T_I(P(x) \wedge \neg P(y)) \dot{\vee} T_I(P(x) \wedge L_2) \dot{\vee} T_I(L_1 \wedge \neg P(y)) \dot{\vee} T_I(L_1 \wedge L_2) \leq \lambda$$

又因为 $T_I(C_1 \wedge C_2) \geq \mu$, 所以 $\mu \leq T_I(C_1 \wedge C_2) \leq \lambda$. 这与 $\mu < \lambda$ 矛盾.

以上表明当 I 满足 $C_1 \wedge C_2$ 时, I 也不弄假 $R(C_1, C_2)$, 即 $R(C_1, C_2)$ 是 $C_1 \wedge C_2$ 有效逻辑结果.

定理 6 在再扩充模糊逻辑中, 设公式 G 是一个前束范式

$$G = (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_n),$$

$(Q_{r+1}x_{r+1})$ 是首标中从左到右的第一个存在量词 $(\exists x_r)$, $f(x_1, \dots, x_{r-1})$ 是对应于 $(\exists x_r)$ 的 Skolem 函数, $G_1 = (\forall x_1) \dots (\forall x_{r-1}) (Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_{r-1}, f(x_1, \dots, x_{r-1}), x_{r+1}, \dots, x_n)$, 则 G 是不可满足的当且仅当 G_1 是不可满足的.

证明 先证明必要性. 设 G 是不可满足的, 下面用反证法证明 G_1 也是不可满足的. 如果 G_1 是可满足的, 则存在 G_1 的解释 I , 使得 $T_I(G_1) \geq \mu$. 将 I 任意扩充为 G 的一个解释, 则

$$T_I(G_1) = \inf\{T_I((Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_{r-1}, f(x_1, \dots, x_{r-1}), x_{r+1}, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_{r-1}) \in D^{r-1}\},$$

而

$$T_I(G) = \inf\{T_I((\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_{r-1}) \in D^{r-1}\},$$

又因为对任一组 $(x_1, \dots, x_{r-1}) \in D^{r-1}$, 都有

$$\begin{aligned} T_I((\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)) &= \\ \sup\{T_I((Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)) : x_r \in D\} &\geq \\ T_I((Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_{r-1}, f(x_1, \dots, x_{r-1}), x_{r+1}, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

所以 $T_I(G) \geq T_I(G_1)$. 又根据 $T_I(G_1) \geq \mu$ 得, $T_I(G) \geq \mu$, 这与 G 是不可满足相矛盾.

再证明充分性. 设 G_1 是不可满足的. 对于 G 的任意解释 I ,

$$\begin{aligned} T_I(G) &= \inf\{T_I((\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_{r-1}) \in D^{r-1}\} = \\ \inf\{\sup\{T_I((Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)) : x_r \in D\} : (x_1, \dots, x_{r-1}) \in D^{r-1}\} &= \\ \sup\{\inf\{T_I((Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_{r-1}, f(x_1, \dots, x_{r-1}), x_{r+1}, \dots, x_n)) : & \\ (x_1, \dots, x_{r-1}) \in D^{r-1}\} : f(x_1, \dots, x_{r-1}) \in D\}. \end{aligned}$$

因为 G_1 是不可满足的, 所以对每一个给定的 Skolem 函数 $f(x_1, \dots, x_{r-1}) \in D$, 都有

$$T_I(G_1) = \inf\{T_I((Q_{r+1}x_{r+1}) \dots (Q_n x_n) M(x_1, \dots, x_{r-1}, f(x_1, \dots, x_{r-1}), x_{r+1}, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_{r-1}) \in D^{r-1}\} \leq \lambda,$$

从而

$$T_I(G) = \sup\{T_I(G_1) : f(x_1, \dots, x_{r-1}) \in D\} \leq \lambda,$$

这说明 G 是不可满足的.

定理 7 在再扩充模糊逻辑中, 公式 G 是不可满足的当且仅当 G 对应的子句集是不可满足的.

证明 因为任一公式都对应一个与它等价的前束范式, 所以简单起见, 不妨设 G 就是一个有 m 个存在量词的前束范式.

令 $G_0 = G$, G_k 是将 G_{k-1} 中从左到右的第一个存在量词用 Skolem 函数代替所得到的公式 ($k = 1, \dots, m$), 则 $S = G_m$. 根据定理 6, G 是不可满足的当且仅当 G_1 是不可满足的, 当且仅当 G_2 是不可满足的. 依此类推, 当且仅当 G_m 是不可满足的, 即 G 对应的子句集是不可满足的.

定理 8 在再扩充模糊逻辑中, 子句集 S 是不可满足的当且仅当 S 的每一个 Herbrand 解释都弄假 S .

证明 先证明必要性. 如果子句集 S 是不可满足的, 则对任意 S 的解释 I , 都有 $T_I(S) \leq \lambda$. 当然对任意 S 的 Herbrand 解释 I^* , 也有 $T_{I^*}(S) \leq \lambda$, 即 I^* 弄假 S .

再证明充分性. 对任意 S 的解释 I , 由文献[3]中 7.2 节引理 11 得, I 对应于一个 Herbrand 解

释 I^* , 且 $T_I(S) \leq T_{I^*}(S)$. 所以如果 I^* 弄假 S , 则 $T_{I^*}(S) \leq \lambda$, 这样 $T_I(S) \leq \lambda$, 即 I 弄假 S .

定理 9 若 $\lambda < 1$ (即 $\mu > 0$), 则子句集 S 在再扩充模糊逻辑中不可满足当且仅当 S 在二值逻辑中不可满足.

证明 先证明必要性. 如果 S 在再扩充模糊逻辑中是不可满足的, 则对任意 S 的解释 I , 都有 $T_I(S) \leq \lambda$. 当然对任意 S 的二值逻辑中的解释 I_0 , 也有 $T_{I_0}(S) \leq \lambda$. 因为在二值逻辑当 $\lambda < 1$ 时, 只有 $\lambda = 0$, 即 $T_{I_0}(S) = 0$, 所以 S 在二值逻辑中是不可满足的.

再证明充分性. 将 S 化为析取范式

$$S = G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_m,$$

其中每个 G_i 都是一些文字的合取, $i = 1, \dots, m$. 因为 S 在二值逻辑中不可满足, 所以每个合取项 G_i 都是不可满足的, 即每个 G_i 都包含互补对. 由文献 [8] 引理 5 得, 每个合取项 G_i 在再扩充模糊逻辑中也是不可满足的, 即 $T_I(G_i) \leq \lambda$ 于是

$$T_I(S) = \sup\{T_I(G_i) : i = 1, \dots, m\} \leq \lambda,$$

所以 S 在再扩充模糊逻辑中也是不可满足的.

参考文献:

- [1] L A Zadeh. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(2): 338-353.
- [2] Chang C L, Lee R C T. Symbolic logic and mechanical theorem proving[M]. New York: Academic Press, 1973.
- [3] 刘叙华, 姜云飞. 定理机器证明[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [4] 刘叙华. 基于归结方法的自动推理[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [5] Ying M (应明生). A logic for approximate reasoning[J]. Journal of Symbolic Logic, 1994, 59(3): 830-837.
- [6] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [7] 刘叙华. 广义模糊逻辑和锁语义归结原理[J]. 计算机学报, 1980, 3(2): 97-119.
- [8] 应明生. 模糊逻辑的再扩充[J]. 计算机学报, 1992, 15(2): 158-160.

Validity of the Further Extension of Fuzzy Reasoning Based on Resolution

LIU Fu-chun

(Faculty of Applied Mathematics, Guangzhou University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: In this paper, some main properties of the further extension of fuzzy logic are generalized. Especially, the necessary and sufficient condition of validly logical consequence is obtained. Then the validity of further extension of fuzzy reasoning based on resolution is discussed. Lastly the equivalence of unsatisfiability in both two-valued logic and further extension of fuzzy logic is proved.

Key words: fuzzy logic; approximate reasoning; resolution; validly logical consequence